Übungen zur Vorlesung „Stochastik für die Informatik“

Abgabe der Lösungen zu den S-Aufgaben per E-Mail bis Freitag, 20. November 2020, 10 Uhr

Leitfaden zur Abgabe der Übungsaufgaben: siehe "Ankündigungen" im Moodle Kurs

5.S *Von den Kollisionswahrscheinlichkeiten zur Rayleighverteilung.* Für $g \in \mathbb{N}$ sei T_g eine $\{1, 2, \dots, g+1\}$-wertige Zufallsvariable mit

$$\mathbf{P}(T_g > n) = \prod_{i=1}^{n-1} \left(1 - \frac{i}{g}\right) =: w(n, g),\ n = 0, 1, \dots, g+1.$$

a) Berechnen Sie für $t \in \mathbb{R}_+$

$$F(t) := \lim_{g \to \infty} \mathbf{P}\left(\frac{T_g}{\sqrt{g}} \le t\right).$$

Dabei dürfen Sie verwenden, dass für alle $t \in \mathbb{R}_+$ gilt

$$\lim_{g \to \infty} w\left(\lfloor t\sqrt{g} \rfloor, g\right) = e^{-t^2/2}.$$

b) Finden Sie eine stetige Funktion $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ mit $F(t) = \int_0^t f(s)\, ds, \quad t \in \mathbb{R}_+$.

c) Skizzieren Sie den Graphen von f. An welcher Stelle hat die Funktion f ihr Maximum?

d) Machen Sie sich mittels des in Moodle bereitgestellten Programms RayleighDiskret.R für drei verschiedene Wert von g nach Ihrer Wahl ein Bild von

(i) den Verteilungsgewichten von T_g (ii) den Verteilungsgewichten von $T_g/\sqrt{g}$

und kommentieren Sie die Ergebnisse kurz mit Blick auf die Aufgabenteile b) und c).

6. *Zwei rekursive Verfahren zur Erzeugung rein zufälliger Permutationen.*

a) Wir erzeugen eine zufällige Abbildung von $\{1, \dots, n\}$ nach $\{1, \dots, n\}$ auf folgende Weise: Wähle zuerst ein rein zufälliges Element (k, ℓ) aus $\{1, \dots, n\}^2$ und treffe dann eine rein zufällige Wahl $(X_1, \dots, X_{k-1}, X_{k+1}, \dots, X_n)$ aus der Menge der bijektiven Abbildungen von $\{1, \dots, k-1, k+1, \dots, n\}$ nach $\{1, \dots, \ell-1, \ell+1, \dots, n\}$. Setze für $i = 1, \dots, n$

$$\Pi_i := \begin{cases} \ell & \text{für } i = k, \\ X_i & \text{für } i \ne k. \end{cases}$$

Begründen Sie, dass $(\Pi_1, \dots, \Pi_n)$ eine rein zufällige Permutation ist.

b) Wir erzeugen die Zyklendarstellung einer zufälligen Permutation von $1, \dots, n$ auf folgende Weise. Wähle zuerst eine rein zufällige Permutation von $1, \dots, n-1$ und bezeichne deren Zyklendarstellung $\mathfrak{Z}$ mit $(1, Y_{1,2}, \dots, Y_{1,L_1}), (Y_{2,1}, \dots, Y_{2,L_2}), \dots, (Y_{K,1}, \dots, Y_{2,L_K})$. (Wir sprechen von 1 als dem ersten, von $Y_{1,2}$ als dem zweiten, ..., Element in $\mathfrak{Z}$.) Wähle danach rein zufällig ein J aus $\{1, \dots, n\}$. Fällt J auf ein $i \in \{1, \dots, n-1\}$, dann setze das Element n rechts neben dem J-ten Element in $\mathfrak{Z}$ in den Zyklus ein, zu dem das J-ten Element in $\mathfrak{Z}$ gehört. Fällt hingegen J auf n, dann füge zu $\mathfrak{Z}$ den einelementigen Zyklus (n) hinzu. Begründen Sie, dass die so entstehende Zyklendarstellung die einer rein zufälligen Permutation von $1, \dots, n$ ist.

c) Erläutern Sie sowohl für den in a) als auch für den in b) beschriebenen Algorithmus, wie man eine rein zufällige Permutation von $1, 2, 3$ bekommt, ausgehend von der trivialen Permutiation $(1 \mapsto 1)$ über die Schritte erst von $n-1 = 1$ nach $n = 2$ und dann von $n-1 = 2$ nach $n = 3$.

7. *Tabuwahrscheinlichkeiten.* Wir treffen eine g-mal wiederholte rein zufällige Wahl aus den Plätzen $\{1, \dots, g\}$.

a) Was ergibt sich für die Wahrscheinlichkeit v_g, dass dabei der Platz 1 nie gewählt wird?

b) Wohin konvergiert v_g für $g \to \infty$?

8.S *Besetzungen bei der wiederholten rein zufälligen Wahl vs. uniform verteilte Besetzungen.* Wir betrachten die Menge $S_{4,6} := \{(b_1, \dots, b_6) : b_j \in \mathbb{N}_0,\ b_1 + \dots + b_6 = 4\}$ der Besetzungen von $g = 6$ Plätzen mit $n = 4$ Objekten (bei erlaubten Mehrfachbelegungen).

a) $U = (U_1, \dots, U_6)$ sei eine auf auf $S_{4,6}$ uniform verteilte ZV'e. Ermitteln Sie $\mathbf{P}(U_1 = 4)$.

b) Es sei $S := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^4$, und h sei die Abbildung von S nach $S_{4,6}$, die ein (a_1, a_2, a_3, a_4) auf $(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6)$ abbildet, wobe b_j die Anzahl der Indizes $i = 1, 2, 3, 4$ ist, für die $a_i = j$ ist. X sei eine rein zufällige Wahl aus S. Wir setzen $h(X) =: Z = (Z_1, \dots, Z_6)$. Berechnen Sie $\mathbf{P}(Z_1 = 4)$.